



Inspectoratul Școlar Județean Timiș

Societatea de Științe Matematice din România

**Olimpiada Națională de Matematică**  
**Etapa Locală, județul Timiș**  
**5.02.2026**

**Clasa a IX-a**  
**Barem de corectare și notare**

1. Rezolvați ecuația:  $x + [x] = 13\{x\}$ , unde  $[x]$  și  $\{x\}$  reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracționară a lui  $x$ .

**Soluție:** Ecuația este echivalentă cu  $6x = 7[x]$ .....5p

Notăm  $\frac{6}{7}x = k \in \mathbb{Z}$  și obținem  $\left[\frac{7k}{6}\right] = k$ .....5p

$k \in [0, 6) \cap \mathbb{Z}$ .....5p

$x \in \left\{0, \frac{7}{6}, \frac{7}{3}, \frac{7}{2}, \frac{14}{3}, \frac{35}{6}\right\}$ .....5p

2. Să se calculeze produsul următor și apoi să se demonstreze prin inducție matematică formula găsită:

$$P_n = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right), \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

**Soluție:** Avem  $P_2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = \frac{2+1}{2 \cdot 2}$ ;  $P_3 = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) = \frac{4}{6} = \frac{3+1}{2 \cdot 3}$ .....5p

Formulează propoziția:  $\left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}, n \geq 2$ .....10p

Demonstrează prin inducție matematică formula găsită.....5p

**Soluție alternativă**

$$P_n = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{2^2-1}{2^2} \cdot \frac{3^2-1}{3^2} \cdot \dots \cdot \frac{n^2-1}{n^2} = \frac{(2-1)(2+1)}{2 \cdot 2} \cdot \frac{(3-1)(3+1)}{3 \cdot 3} \cdot \dots \cdot \frac{(n-1)(n+1)}{n \cdot n} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} \cdot \dots \cdot \frac{(n-1)(n+1)}{n \cdot n}.$$

După simplificare ajunge la  $\left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$

3. Fie  $x, y, z \in (0, \infty)$ . Să se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{1}{x^2+yz} + \frac{1}{y^2+zx} + \frac{1}{z^2+xy} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \right).$$



**Soluție:** Din inegalitatea mediilor  $\frac{x^2+yz}{2} \geq \sqrt{x^2 \cdot yz} \Rightarrow x^2 + yz \geq 2x\sqrt{yz} \Rightarrow \frac{1}{x^2+yz} \leq \frac{\sqrt{yz}}{2xyz}$ .....5p

$\frac{1}{x^2+yz} + \frac{1}{y^2+zx} + \frac{1}{z^2+xy} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{yz}}{xyz} + \frac{\sqrt{zx}}{xyz} + \frac{\sqrt{xy}}{xyz} \right)$ .....5p

Din  $\sqrt{xy} = \frac{x+y}{2} \Rightarrow \sqrt{xy} + \sqrt{xz} + \sqrt{yz} \leq x + y + z$  .....5p

Finalizare.....5p

4. Se consideră triunghiul  $ABC$ . Paralelele duse prin vârfurile triunghiului  $ABC$  la laturile opuse se intersectează în punctele  $A', B', C'$ . Dacă  $H$  și  $H'$  sunt ortocentrele triunghiurilor  $ABC$  respectiv  $A'B'C'$ , demonstrați că:  $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HH'}$ .

**Soluție:** Dacă  $A$  mijlocul  $(B'C')$ , avem  $HA \perp BC$  și  $B'C' \parallel BC$  obține  $HA \perp B'C'$ .....5p

Deduce  $HA$  mediatoarea segmentului  $B'C'$ . Analog  $HB, HC$  mediatoarele segmentelor  $(C'A')$  și  $(A'B')$ .....5p

Obține  $H$  centrul cercului circumscris triunghiului  $A'B'C'$ .....5p

Din teorema Sylvester avem  $\overrightarrow{HA'} + \overrightarrow{HB'} + \overrightarrow{HC'} = \overrightarrow{HH'}$ .....5p

$A$  mijlocul segmentului  $(B'C')$  atunci  $\overrightarrow{HA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{HB'} + \overrightarrow{HC'})$ . Analog  $\overrightarrow{HB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{HC'} + \overrightarrow{HA'})$ ,  $\overrightarrow{HC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{HA'} + \overrightarrow{HB'})$ .....5p

Finalizare  $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA'} + \overrightarrow{HB'} + \overrightarrow{HC'} = \overrightarrow{HH'}$ .....5p